www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES ARTS ET INDUSTRIES TEXTILES DE ROUBAIX

CONCOURS D'ENTREE 1989 Epreuve de MATHEMATIQUES 1
durée 2 heures

(Tous les candidats)

NOTATIONS On note :

- $R_n[X]$ l'espace vectoriel réel des fonctions polynômes réelles, de degré inférieur ou égal à n.
- $I_n = \{0, 1, \ldots i, \ldots n\}$
- $\mathcal{B}$ la base canonique de $R_n[X]$ des polynômes e_i définis par $e_i(x) = x^i$ où i est élément de I_n.
- $\mathcal{C}[0 ; 1]$ l'espace vectoriel réel (pour les opérations usuelles) des fonctions numériques d'une variable réelle, continues sur l'intervalle $[0 ; 1]$ de R.

N.B. : Les parties II et III sont indépendantes l'une de l'autre.

- I -

n étant un entier naturel, on appelle polynômes de Bernstein, les polynômes $\Phi_{n,i}$ définis par :
$\Phi_{n,i}(x) = C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$ où i est élément de I_n et x un nombre réel.

1.1 Montrer que les $\Phi_{n,i}$ constituent une base $\mathcal{B}'$ de $R_n[X]$. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

1.2 Montrer que, pour tout n entier naturel, pour tout x élément de $[0 ; 1]$, pour tout i élément de I_n on a :

1.2.1. $\Phi_{n,i}(x) \geq 0$.

1.2.2. $\sum_{i=0}^{i=n} \Phi_{n,i}(x) = 1$

1.2.3. $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{i}{n} \Phi_{n,i}(x) = \alpha x + \beta$. où α et β sont deux constantes que l'on déterminera.

1.2.4. $\sum_{i=0}^{i=n} \frac{i^2}{n^2} \Phi_{n,i}(x) = \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n}$

1.2.5. En déduire que $\sum_{i=0}^{i=n} (i-nx)^2 \Phi_{n,i}(x) = nx(1-x)$

1.3 **1.3.1.** Que valent $\Phi_{n,0}(0)$ et $\Phi_{n,n}(1)$?

1.3.2. i étant élément de $I_n \setminus \{0, n\}$, montrer que $\Phi_{n,i}(x)$ admet en un point $x_{n,i}$ de $]0 ; 1[$ un maximum $M_{n,i}$ que l'on calculera.

1.4 Dans les trois cas suivants : n=1, n=2, n=3.

1.4.1. Expliciter la base de Bernstein.

1.4.2. Pour tout x élément de $[0 ; 1]$, représenter graphiquement (sur un même graphe pour chaque valeur de n) les fonctions polynômiales précédemment définies.

- II -

Soit P élément de $R_n[X]$. P peut se décomposer sur la base $\mathcal{B}'$ de Bernstein $P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i \Phi_{n,i}(x)$

On pose : $\Delta^0 b_i = b_i$ $\Delta^1 b_i = b_{i+1} - b_i$ $\Delta^{k+1} b_i = \Delta(\Delta^k b_i)$ pour $k \geq 1$.

2.1 Montrer que, pour tout k élément de I_n, pour tout x élément de $[0 ; 1]$ $P^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^{i=n-k} \Delta^k b_i \Phi_{n-k,i}(x)$

$P^{(k)}(x)$ désignant la dérivée k-ième de P(x).(On pourra faire une démonstration par récurrence sur k)

En déduire $P^{(k)}(0)$ et $P^{(k)}(1)$.

Dans la base canonique $\mathcal{B}$, on a : $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$

2.2 Donner une expression simple de a_k en fonction de $\Delta^k b_0$, n et k.

- III -

n étant un entier naturel, on associe à toute fonction f de $\mathcal{C}[0 ; 1]$, la suite des fonctions polynômiales $B_n(f)$ définies par :
$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^{i=n} f\left(\frac{i}{n}\right) \Phi_{n,i}(x)$$

3.1 Soit un réel $\mu > 0$. Pour x élément de $[0 ; 1]$ on définit $J_n = \{i \in I_n ; \left|\frac{i}{n} - x\right| \geq \mu\}$

Montrer, en utilisant le résultat de 1.2.5. que pour x élément de $[0 ; 1]$ on a : $\sum_{i \in J_n} \Phi_{n,i}(x) \leq \frac{1}{4n\mu^2}$

3.2 On se propose de montrer que la suite $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur [0, 1], lorsque n tend vers l'infini.

3.2.1. Etablir l'inégalité

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_{i=0}^{i=n} \Phi_{n,i}(x) \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \quad (a)$$

3.2.2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Montrer que pour un nombre μ bien choisi

$$\sum_{i \in K_n} \Phi_{n,i}(x) \left|f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon \qquad \text{où } K_n = \left\{i \in I_n ; \left|\frac{i}{n} - x\right| < \mu\right\}$$

3.2.3. Majorer la somme des autres termes du second membre de (a)

3.2.4. En déduire que la suite $B_n(f)$ converge uniformément vers f sur $[0 ; 1]$, lorsque n tend vers l'infini.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail